Олимпиада школьников по математике

«ТИИМ-2021»

Заключительный тур

28 марта 2021 года

11 класс

▷ **1.** Найдите среднее арифметическое всех корней уравнения

$$2\log_3 ctg\frac{\pi x}{3} = \log_2 \cos\frac{\pi x}{3},$$

принадлежащих отрезку $[1921; 2021]$.

▷ **2.** В тетраэдре $ABCD$ точки K, L, M принадлежат рёбрам AD, DB и BC соответственно, причём $|AK| : |KD| = 2 : 3$, $|DL| : |LB| = 3 : 4$, $|BM| : |MC| = 4 : 5$. Через точки KLM проведена плоскость, которая делит тетраэдр на два многогранника. Найдите отношение их объёмов.

▷ **3.** В последованности цифр 19213... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности: а) набор цифр 2021, б) вторично набор 1921, в) набор 6391?

▷ **4.** Какие значения может принимать выражение $\sin 1921\beta + \cos 2021\alpha$, если известно, что

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) \geqslant \frac{3}{2}$$

▷ **5.** Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} \overline{ab} + \overline{cd} = \overline{efg}, \overline{xy} = x \cdot 10 + y \\ \{a; b\} \cup \{c; d\} = \{e; f; g\}, \overline{xyz} = x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + 1 \end{cases}$$

▷ **6.** Два игрока поочередно в произвольном порядке заменяют коэффициенты многочлена

$$a_1x^{1920} + a_2x^{1919} + ... + a_kx^{1921-k} + ... + a_{1920}x + a_{1921}$$

целыми числами (каждый коэффициент можно заменить ровно один раз). Начинающий игрок побеждает, если все значения многочлена, полученного в конце игры, при целых значениях переменной дают одинаковые остатки при делении на 6; если же это условие не выполнено, побеждает второй игрок. Кто победит при правильной игре?

▷ **7.** Найдите все функции $f : R \to R$, являющиеся решениями функционального уравнения

$$f(a+x) - f(a-x) = 4ax,$$

где $a \in R$ – фиксированное число.

▷ **8.** В круге радиуса R проведена хорда AD длиной единица. С помощью циркуля и линейки постройте параллельную ей хорду BC так, чтобы трапеция $ABCD$ имела наибольшую площадь. Рассмотреть случаи: а) $R = 1$; б) $R = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

▷ **9.** Внутри правильного треугольника со стороной $4+2\sqrt{3}$ находятся 5 непересекающихся окружностей радиуса 1 (допускаются касания окружностей между собой и со сторонами треугольника). Доказать, что, не меняя положение данных окружностей, в этот треугольник можно поместить ещё одну единичную окружность, не пересекающуюся с данными.

▷ **10.** Робот случайно выбирает натуральное число из отрезка $[1921; 2021]$. Какова вероятность того, что выражение $2^x - x^2$ делится на 7.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!